1.0 Der zum Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems punktsymmetrische Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Definitions-menge $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ besitzt einen lokalen Tiefpunkt an der Stelle $x = -2$.

1.1 Skizzieren Sie mithilfe der oben genannten Eigenschaften von f einen möglichen Graphen dieser Funktion und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an. 3

1.2 Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen $G_{f'}$ der ersten Ableitungsfunktion f' mit Worten. Geben Sie dabei insbesondere die Nullstellen der Funktion f', die Lage des Extrempunktes und das Symmetrieverhalten des Graphen $G_{f'}$ an. 4

2 Lösen Sie die beiden folgenden Gleichungen über der Grundmenge der reellen Zahlen. 6

a) $3x^4 - 12x^2 = 0$

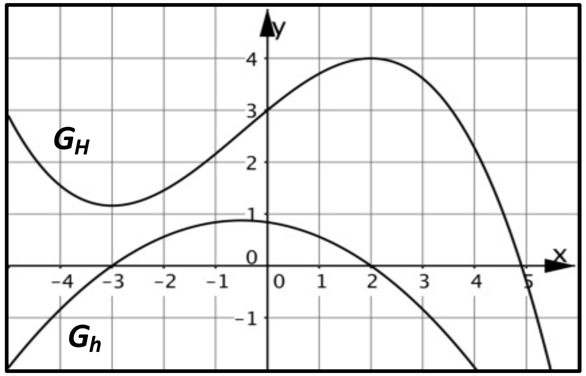
b) $e^{x^2} = e^{2x-1}$

3.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \to e^{0,25x} - e^{-0,25x}$ mit Definitionsmenge $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

3.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion g zum Koordinatensystem und geben Sie $\int_{-2}^{+2} g(x)\,dx$ an. 3

3.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion g an der Stelle $x = 0$. 3

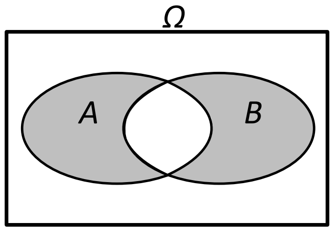
4 In der folgenden Abbildung sind ein Ausschnitt des Graphen der Funktion h und der entsprechende Ausschnitt des Graphen einer Stammfunktion H von h dargestellt. Entnehmen Sie der Abbildung den Wert der Differenz $H(2) - H(0)$ und interpretieren Sie diesen Wert bezüglich des Graphen von h geometrisch. 3



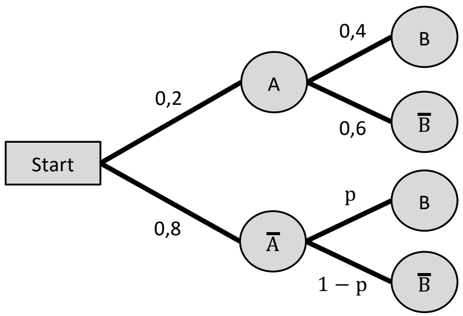
2020 A (ohne Hilfsmittel)

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1 A und B sind zwei beliebige vereinbare Ereignisse von Ω. Geben Sie das in nebenstehendem Venn-Diagramm grau unterlegte Ereignis E_1 in möglichst einfacher Symbolschreibweise an und veranschaulichen Sie das Ereignis $E_2 = \overline{A \cap \overline{B}}$ in einem Venn-Diagramm. 3



2.0 Folgendes Baumdiagramm stellt die Ergebnisse eines zweistufigen Zufallsexperiments dar. Dabei gilt: $p \in \mathbb{R}$ und $0 \leq p \leq 1$.



2.1 Bestimmen Sie den Wert von p so, dass für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B gilt: $P(B) = 0{,}24$. 2

2.2 Das zweistufige Zufallsexperiment ist ein Gewinnspiel, bei dem man nur gewinnt, wenn das Ereignis $\overline{A} \cap \overline{B}$ eintritt. Interpretieren Sie folgende Gleichung im Sachzusammenhang: $\big(0{,}8 \cdot (1-p)\big)^3 = 0{,}001$ 2

3 Auf einem Schulfest wird als Gewinnspiel Dosenwerfen angeboten. Aus den Vorjahren weiß man, dass nur 10% der Teilnehmer es schaffen, alle Dosen abzuräumen und somit einen Gewinn zu erhalten. Betrachtet werden nun sieben zufällig ausgewählte aufeinanderfolgende Teilnehmer. Geben Sie jeweils einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse berechnet werden kann: 5

- E_1: „Die letzten beiden Teilnehmer gewinnen."
- E_2: „Gewinner und Verlierer wechseln sich ab."
- E_3: „Genau drei Teilnehmer gewinnen und diese folgen aufeinander."

1.0 Für eine ganzrationale Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ gelten folgende Gleichungen:

I. $f(0) = 0$

II. $f'(0) = 0$

III. $f(-3) = -3$

IV. $f'(-3) = -1$

Der zugehörige Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Beschreiben Sie in Worten, welche Eigenschaften der Graph von f aufgrund obiger Gleichungen hat. 2

1.2 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f. 5

[mögliches Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$]

1.3.0 Im Folgenden wird die Funktion g mit $g(x) = f(x)$ und der im Vergleich zu $\mathbb{D}_f$ eingeschränkten Definitionsmenge $\mathbb{D}_g = [-4{,}5; +1]$ betrachtet. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

1.3.1 Ermitteln Sie die Wertemenge $\mathbb{W}_g$ der Funktion g. Bestimmen Sie dazu die Koordinaten sämtlicher Extrempunkte. 8

1.3.2 Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion g. 3

1.3.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_g in ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem. Ermitteln Sie dazu die Nullstellen der Funktion g. Als Maßstab gilt für beide Achsen: $1\ LE = 1\ cm$ 5

1.3.4 Der Graph der Funktion g und die x-Achse schließen im III. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. 3

2.0 Der Verlauf der Anzahl der Neuerkrankungen für eine bestimmte Grippewelle in einer gewissen Region in Abhängigkeit von der Zeit kann vereinfacht durch die Funktion N mit der Funktionsgleichung $N(t) = 2t^2 \cdot e^{-0{,}5t}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben werden. Dabei bedeutet die Variable t die Zeit in Wochen ab Beginn der Grippewelle zum Zeitpunkt $t_0 = 0$. Der Funktionswert $N(t)$ gibt die Anzahl der an Grippe neu erkrankten Menschen in Tausend an. Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

2.1 Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt t_{max} die Zahl der neu erkrankten Menschen ihr Maximum annimmt, und berechnen Sie diese maximale Anzahl. 7

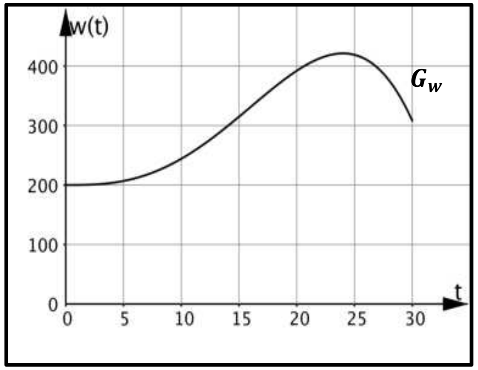
[Teilergebnis: $N'(t) = (4t - t^2) \cdot e^{-0{,}5t}$]

2.2 Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte $N(t)$ für $t \to \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. 2

2.3 Zeichen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion N im Bereich $0 \leq t \leq 10$ in ein geeignetes beschriftetes Koordinatensystem. Als Maßstab gilt für beide Achsen: $1\ LE = 1\ cm$ 3

2.4 Gegeben ist die Funktion $G: t \mapsto (-4t^2 - 16t - 32) \cdot e^{-0{,}5t}$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_G = \mathbb{R}_0^+$. Zeigen Sie, dass die Funktion G eine mögliche Stammfunktion von N ist. Berechnen Sie damit die durchschnittliche Anzahl an neu erkrankten Menschen während der ersten acht Wochen ab Beginn der Grippewelle. 5

1.0 Das Landesamt für Umwelt ist unter anderem dafür zuständig, vor Überflutungen durch Flüsse zu warnen, und lässt dazu täglich kontinuierlich die Wasserstände diverser Flüsse überprüfen. Der Wasserstand eines bestimmten Flusses im März des Jahres 2010 kann vereinfacht durch die Funktion w mit der Funktionsgleichung $w(t) = at^4 + bt^3 + c$ mit geeigneten Werten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und der Definitionsmenge $\mathbb{D}_w = [0; 30]$ beschrieben werden. Dabei bedeutet die Variable t die Zeit in Tagen ab Monatsbeginn zum Zeitpunkt $t_0 = 0$. Der Funktionswert $w(t)$ gibt den Wasserstand des Flusses in cm an. Zu Monatsbeginn lag der Wasserstand bei 200 cm und am Monatsende bei 308 cm. Der höchste Wasserstand wurde am 25. März – also zum Zeitpunkt $t_{max} = 24$ – gemessen. Der abgebildete Graph zeigt den Wasserstand $w(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t. Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse – falls nicht anders gefordert – sinnvoll.



1.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a, b und c und damit die zugehörige Funktionsgleichung von w. 6

$$\left[\text{mögliches Ergebnis: } w(t) = -\frac{1}{500}(t^4 - 32t^3 - 100.000)\right]$$

1.2 Berechnen Sie den höchsten Pegel im Beobachtungszeitraum zentimetergenau. 2

1.3 Ermitteln Sie rechnerisch das Datum im Beobachtungszeitraum, an dem die Änderungsgeschwindigkeit des Pegelstandes am größten war. 6

1.4 Berechnen Sie $\frac{1}{30}\int_0^{30} w(t)\,dt$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. 3

2.0 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto x^2 \cdot e^{-x}$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

2.1 Geben Sie die Nullstelle der Funktion f an und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$. 4

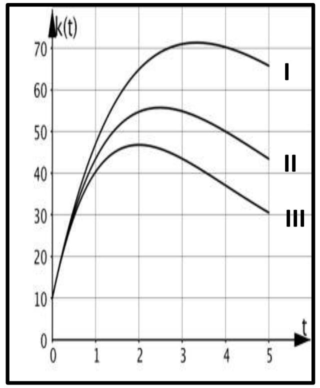
2.2 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion f streng monoton steigt bzw. streng monoton fällt, und damit die Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen von f. 8

2.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-1 \le x \le 6$ in ein geeignetes Koordinatensystem. 3
Als Maßstab für beide Achsen gilt: $1\ LE = 1\ cm$.

3.0 Der Bestand einer Bakterienkultur, der kontinuierlich Gift zugeführt wird, kann in den ersten fünf Stunden näherungsweise durch eine Funktion des folgenden Typs beschrieben werden:

$$k\colon t \mapsto 50t \cdot e^{-at} + 10 \text{ mit } t \in [0; 5]$$

Dabei gibt t die seit Beginn der Giftzugabe zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ vergangene Zeit in Stunden an. Der Funktionswert $k(t)$ gibt die Anzahl der Bakterien in Tausend an. Je nach Wirksamkeit des Gifts ist a eine dem Gift entsprechende positive reelle Zahl. Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll. Nebenstehende Abbildung zeigt drei Ausschnitte von Graphen der Funktion k für drei verschiedene Werte für a.



Graph I gilt für $a_1 = 0{,}3$ mit $k_I(t) = 50t \cdot e^{-0{,}3t} + 10$
Graph II gilt für $0{,}3 < a_2 < 0{,}5$ mit $k_{II}(t) = 50t \cdot e^{-a_2 t} + 10$
Graph III gilt für $a_3 = 0{,}5$ mit $k_{III}(t) = 50t \cdot e^{-0{,}5t} + 10$

3.1 Berechnen Sie für $t_1 = 0$ und $t_2 = 2$ den Quotienten $\frac{k_{III}(t_2) - k_{III}(t_1)}{t_2 - t_1}$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. 3

3.2 Überprüfen Sie bei der Funktion k_{III} rechnerisch, ob vier Stunden nach Beginn der Giftzugabe die momentane Abnahmerate der Anzahl der Bakterien ca. 113 Bakterien pro Minute beträgt. 3

3.3 Entnehmen Sie der Abbildung ein geeignetes Wertepaar von Graph II und berechnen Sie damit den Wert a_2 für den Funktionsterm $k_{II}(t)$. Folgern Sie aus den Angaben und dem berechneten Wert für a_2, wie die Größe von a mit der Wirksamkeit des Gifts zusammenhängt. 5

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein großer Bergbauernhof bietet seinen Gästen während ihres Urlaubsaufenthalts verschiedene Möglichkeiten an, das Leben auf dem Land zu genießen. Erfahrungsgemäß entscheiden sich die Hälfte aller Gäste auf einer der einsamen Hütten (H) zur Ruhe zu kommen, 30 % verbringen ihren Aufenthalt im gemütlichen Stadl (S) und die übrigen Besucher übernachten im Bauernhaus (B). Bei der Anreise hat jeder Gast die Wahl, den steilen Weg bis zum Feriendomizil zu Fuß zurückzulegen ($\overline{T}$) oder sich von einem Traktorshuttle (T) nach oben befördern zu lassen. Von den Hüttenbewohnern nutzen nur ein Viertel diesen Service, bei den Stadlgästen sind es die Hälfte und von den Gästen im Bauernhaus erklimmt keiner zu Fuß den Berg. Für Stadlgäste und Gäste des Bauernhauses besteht zusätzlich die Möglichkeit, ein Frühstück (F) dazu zu buchen. Jeweils ein Fünftel dieser Gäste nutzen dieses Angebot nicht, unabhängig davon, ob der Shuttleservice in Anspruch genommen wird oder nicht. Hüttenbewohner können kein Frühstück buchen. Die Befragung eines zufällig ausgewählten Gastes nach seinen getätigten Buchungen wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1 Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments. 4

1.2 Gegeben sind folgende Ereignisse: 4

- E_1: „Ein Gast entscheidet sich gegen den Aufstieg zum Bergbauernhof.“
- $E_2 = \{STF; S\overline{T}F; BTF\}$

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und berechnen Sie $P(E_1)$. Fassen Sie E_2 möglichst einfach in Worte und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf Unvereinbarkeit.

2.0 Für Kinder gibt es auf dem Bauernhof spezielle Angebote, die stetig der Nachfrage angepasst werden sollen. Derzeit stehen Ponys (P) zur Pferdepflege und für kleine Ausritte zur Verfügung. Ebenso besteht die Möglichkeit zur Mithilfe im Kuh- und Kälberstall (S). Aus dem Vorjahr ist bekannt, dass sich von 400 Kindern 108 für die Arbeit im Stall und 250 für die Ponys begeisterten, wobei 20 % dieser Ponyinteressierten auch von der Mithilfe im Stall nicht genug bekommen konnten.

2.1 Berechnen Sie, für wie viel Prozent der Kinder ein Alternativangebot ohne Tierkontakt wünschenswert wäre. 3

2.2 Ermitteln Sie, ob die Mithilfe im Stall bei den Ponyinteressierten beliebter ist als bei denen, die sich nicht für Ponys begeistern. 2

3.0 Nachdem beim Besitzer des Bergbauernhofs im vorletzten Jahr immer wieder Anfragen nach Freizeitaktivitäten für Erwachsene eingingen, bietet er seit letztem Jahr auch die in folgender Preisliste aufgeführten Erlebnisse an:

Preisliste für Erlebnisse

Melkkurs.. 12 €
geführte Wanderung.. 8 €
bayerischer Kochkurs... 22 €

☺ 10% Rabatt auf den Gesamtpreis bei Buchung der geführten Wanderung in Kombination mit dem Kochkurs! ☺

Die Gäste zeigen erfahrungsgemäß folgendes Wahlverhalten:

nur Melkkurs	nur Kochkurs	nur geführte Wanderung	Kochkurs und geführte Wanderung	kein Erlebnis
15%	22%	18%	10%	35%

Andere Kombinationen von Erlebnissen wurden nicht gewählt.

3.1 Ermitteln Sie die zu erwartenden Einnahmen des Bergbauernhofs durch das Erlebnisangebot für das aktuelle Jahr, wenn mit 900 erwachsenen Gästen für dieses Jahr gerechnet wird. 2

3.2 Da es für einzelne Erlebnisse für die zeitgleich anwesenden Urlaubsgäste Teilnehmerbegrenzungen gibt, interessiert sich der Landwirt für die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: 3

- E_3: „Von 25 Gästen wählen genau acht nur die geführte Wanderung.“
- E_4: „Von 25 Gästen wählen mindestens vier und weniger als neun den Melkkurs.“

Bestimmen Sie die zughörigen Wahrscheinlichkeiten.

4 Aufgrund der steigenden Nachfrage nach „Urlaub auf dem Bauernhof“ überlegt der Besitzer des Bergbauernhofs zusätzlich ein besonderes Erlebnis, Übernachtungen im Freien auf einem gemütlichen Heuwagen, anzubieten. Ein befreundeter Bauernhofbesitzer behauptet basierend auf seinen Erfahrungen, dass höchstens 30 % der Gäste dieses Angebot in Anspruch nehmen. Dennoch ist der Besitzer des Bergbauernhofs der festen Überzeugung, dass Übernachtungen im Freien ein neuer Trend sind, und schätzt die Nachfrage deutlich höher ein (Gegenhypothese). Um dies zu überprüfen, befragt er 200 seiner Gäste. Entwickeln Sie für den Bauern einen geeigneten Hypothesentest auf einem Signifikanzniveau von 5 % und geben Sie an, ob der Behauptung des befreundeten Bauern auf Basis des Tests zugestimmt werden kann, wenn sich 131 Befragte gegen eine Übernachtung im Freien aussprechen. 5

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Nachfolgende finden Sie einen Auszug aus der Preisliste eines Friseursalons:

Damen		**Herren**	
▪ *Schnitt*	*16,00 €*	▪ *Schnitt*	*12,00 €*
▪ *Waschen, Schneiden*	*23,00 €*	▪ *Waschen, Schneiden*	*18,50 €*
▪ *Waschen, Schneiden, Föhnen*	*34,50 €*	**Koloration**	
▪ *Waschen, Föhnen*	*18,50 €*	▪ *Farbe*	*26,50 €*
5% Rabatt auf Komplettpaket → Waschen, Schneiden, Färben und Föhnen!			

In einer groß angelegten Umfrage unter den weiblichen Kunden des Salons wurde festgestellt, wie häufig zum Haareschneiden (S) die Zusatzleistungen Waschen (W), Föhnen (F) und Kolorieren (K) gewünscht werden. Folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeiten für die Wahl von Dienstleistungen an. In dieser ist berücksichtigt, dass zum Kolorieren die Zusatzleistung Waschen gewählt werden muss und Föhnen nur in Kombination mit Waschen gewählt werden kann.

ω	S	WS	WSF	WSK	WSKF
$P(\{\omega\})$	0,15	0,20	0,35	0,06	0,24

1.1 Zur Planung der Terminvergabe und des Einkaufs von Haarfärbemitteln und Pflegeprodukten sind die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse von Interesse. 5

- E_1: „Von 15 zufällig ausgewählten Kundinnen wählen genau fünf nur höchstens eine Zusatzleistung.“
- E_2: „Von 15 zufällig ausgewählten Kundinnen entscheiden sich mehr als 40% für eine Koloration.“

Berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

1.2.0 Die Zufallsgröße X gibt den Betrag in Euro an, den eine Kundin für die gewählten Dienstleistungen bei einem Besuch im Friseursalon bezahlt.

1.2.1 Erstellen Sie mithilfe der Preisliste eine vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X und interpretieren Sie ihn im Sachzusammenhang. Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf ganze Cent. 5

1.2.2 Der Friseursalon hat pro Monat (u. a. für Wasser, Strom, Gehaltszahlungen und Miete) Ausgaben in Höhe von 7.500 € pro Tag ist durchschnittlich mit 15 Kundinnen und 8 Kunden zu rechnen. Letztere bezahlen im Durchschnitt 14,50 € beim Verlassen des Friseursalons. Entscheiden Sie durch Rechnung unter Berücksichtigung der Ergebnisse von Aufgabe 1.2.1, ob die Inhaberin die Preise erhöhen sollte, wenn ein monatlicher Gewinn von 6.500 € erzielt werden soll. Ein Monat hat durchschnittlich 21 Arbeitstage. 2

2 Das Haarefärben ist sowohl bei Erwachsenen als auch bei Jugendlichen sehr beliebt. Um ihre Zeitplanung zu optimieren, führt die Salonbesitzerin eine Strichliste, in der sie das Alter aller Kunden sowie deren Wunsch nach Farbe vermerkt. Unter 200 Kunden waren 140 Erwachsene (E). Insgesamt ließen sich 55 Kunden die Haare färben (F). 40 Kunden waren Jugendliche, die sich gegen eine Koloration entschieden. Untersuchen Sie, bei welcher Altersgruppe das Haarefärben beliebter ist. 4

3.0 Seit mehreren Jahren bezieht die Salonbetreiberin ihre Pflegeprodukte von einem Hersteller, der bekannt ist für die gute Qualität seiner Produkte und damit wirbt, dass höchstens 5 % der Kunden und Kundinnen diese „nicht vertragen“. Aufgrund zahlreicher Kundenbeschwerden vermutet die Inhaberin, dass dieser Anteil gestiegen ist (Gegenhypothese). Um dies zu überprüfen, soll ein Signifikanztest auf einem Signifikanzniveau von 2 % durchgeführt werden. Dazu werden insgesamt 100 Kunden und Kundinnen, bei denen die Pflegeprodukte bereits verwendet wurden, befragt.

3.1 Geben Sie für diesen Test die Testgröße sowie die Nullhypothese an. Berechnen Sie ferner den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese. Erklären Sie außerdem, welche Entscheidung der Test nahe legt, wenn sich insgesamt 9 Kunden und Kundinnen beschweren. 5

3.2 Berechnen Sie für diesen Test die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn tatsächlich 10 % der Kunden und Kundinnen die Pflegeprodukte des Herstellers „nicht vertragen“. Deuten Sie die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art im Sachzusammenhang. 2